عباس قلعه پوراقدم، دبیر ریاضی ارومیه

نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی

اشاره

موضوع این مقاله، طرح و اثبات یکی از مهم‌ترین نابرابری‌های ریاضی است که در آنالیز ریاضی و هندسه کاربرد فراوانی دارد. این نامساوی، به «قضیهٔ نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی» موسوم است که در مسئلهٔ ششم و حالت خاص آن (برای دو عدد)، در اولین مسئله معرفی و اثبات می‌شود.

کلیدواژه‌ها: **واسطهٔ هندسی، واسطهٔ حسابی، روابط بازگشتی، استقرای ریاضی**

مقدمه

برای n عدد حقیقی مثبت a_1، a_2، ... و a_n، واسطه‌های حسابی، هندسی و توافقی، به ترتیب با $A_n(a)$، $G_n(a)$ و $H_n(a)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_n(a)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

$$G_n(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

$$H_n(a)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

در حالت خاص، واسطه‌های حسابی، هندسی و توافقی دو عدد حقیقی مثبت a و b به‌صورت $\frac{a+b}{2}$، $\sqrt{ab}$ و $\frac{2ab}{a+b}$ تعریف می‌شوند.

مسئلهٔ ۱. نشان دهید، برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم: $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ (۱). حالت تساوی موقعی برقرار است که a و b برابر باشند.

حل (اثبات به روش روابط بازگشتی): طرفین نابرابری (۱) را به توان دو می‌رسانیم و سپس چهار برابر می‌کنیم تا به نامساوی $4ab\le(a+b)^2$ برسیم. با بسط سمت راست و انتقال $4ab$، خواهیم داشت: $0\le a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$. به وضوح نابرابری اخیر برای هر دو عدد a و b برقرار است. پس فرایند اثبات می‌تواند از همین نامساوی آغاز شود: $(a-b)^2\ge0\Rightarrow a^2-2ab+b^2\ge0$. به طرفین نابرابری اخیر $4ab$ را اضافه می‌کنیم:

$$a^2+2ab+b^2\ge4ab\Rightarrow(a+b)^2\ge4ab$$

$$\Rightarrow a+b\ge2\sqrt{ab}\Rightarrow\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$$

تساوی در رابطهٔ (۱) با $(a-b)^2=0$ برقرار می‌شود و شرط آن $a=b$ است.

مسئلهٔ ۲. ثابت کنید، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}\quad(2)$$

(مربع واسطهٔ حسابی دو عدد، کمتر یا مساوی واسطهٔ حسابی مربعات آن دو عدد است.)

حل: سمت چپ نابرابری (۲) را بسط و عبارت $\frac{a^2+b^2}{2}$ را به چپ انتقال می‌دهیم:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-\frac{a^2+b^2}{2}\le0\Rightarrow\frac{2ab-a^2-b^2}{4}\le0$$

$$\Rightarrow\frac{a^2-2ab+b^2}{4}\ge0\Rightarrow(a-b)^2\ge0$$

به وضوح نابرابری اخیر برای هر دو عدد حقیقی a و b برقرار است و چون تمامی روابط برگشت‌پذیرند، لذا حکم به اثبات رسیده است.

مسئلهٔ ۳. نشان دهید مجموع یک عدد مثبت و معکوس آن، حداقل برابر دو است.

حل: فرض می‌کنیم x عدد حقیقی مثبتی باشد. در این صورت $\frac{1}{x}$ نیز چنین خواهد بود. از مسئلهٔ (۱) برای دو عدد x و $\frac{1}{x}$ داریم:

$$\sqrt{x\times\frac{1}{x}}\le\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\Rightarrow\sqrt{1}\le\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\ge2$$

مسئلهٔ ۴. ثابت کنید واسطهٔ توافقی دو عدد مثبت a و b از واسطهٔ هندسی آن‌ها بیشتر نیست. به بیان دیگر:

$$\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}$$

حل: از مسئلهٔ (۱) برای دو عدد مثبت $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}}\le\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{a+b}{2ab}\Rightarrow\sqrt{ab}\ge\frac{2ab}{a+b}$$

مسئلهٔ ۵. نشان دهید بین همهٔ مستطیل‌های دارای مساحت ثابت S، مربع کمترین محیط را دارد.

حل: فرض می‌کنیم a و b طول و عرض مستطیل باشند. محیط این مستطیل $p=2(a+b)$ و مساحت آن $S=ab$ خواهد بود. از مسئلهٔ (۱) می‌توان نوشت:

$$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \qquad (*)$$

چون $S=ab$ و $\frac{a+b}{2}=\frac{p}{4}$، پس داریم:

$$S=ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{4}\right)^2$$

و در ادامه:

$$S\le\left(\frac{p}{4}\right)^2\Rightarrow p\ge4\sqrt{S} \qquad (**)$$

P کمترین مقدار خود، یعنی $4\sqrt{S}$ را خواهد داشت اگر نابرابری (**) به یک تساوی تبدیل شود، که شرط آن برقراری حالت برابری در (*) است. بنا به مسئلهٔ (۱)، شرط تساوی در (*)، $a=b$ است. مستطیلی که طول و عرض آن برابرند، مربع است.

مسئلهٔ ۶. «قضیهٔ نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی»

برای هر n عدد مثبت a_1، a_2، ... و a_n داریم:

$$G_n(a)\le A_n(a),$$

به عبارت دیگر: $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\le\frac{a_1+a_2+...+a_n}{N}$.

حالت تساوی با شرط $a_1=a_2=...=a_n$ برقرار می‌شود.

حل: اثبات‌های زیادی برای قضیه وجود دارند که برخی از آن‌ها به مباحث ریاضیات عالی وابسته هستند و در دبیرستان نمی‌توان آن‌ها را مطرح کرد. از بین اثبات‌های دبیرستانی، روش استقرای ریاضی را ارائه می‌کنیم:

قضیه به وضوح برای $n=2$ برقرار است، چون: $\frac{a_1 \quad a_2}{}\ge\sqrt{a_1a_2}$. فرض کنیم (فرض استقرا)، قضیه برای n عدد مثبت برقرار باشد. باید نشان دهیم برای $n+1$ عدد مثبت نیز برقرار است. $n+1$ عدد مثبت دلخواه به صورت a_1، a_2، ... و a_n و a_{n+1} را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم طوری چیده شده باشند که a_{n+1} بزرگ‌ترین عدد باشد. در این صورت خواهیم داشت: $a_{n+1}\ge a_1$، $a_{n+1}\ge a_2$، ...، $a_{n+1}\ge a_n$. چون a_{n+1} از تمامی a_iها که $i\in\{1,2,...,n\}$، بیشتر یا مساوی است، پس از میانگین آن‌ها هم کمتر نخواهد بود. یعنی:

$$a_{n+1}\ge\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.$$

فرض کنیم:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=A_n,$$

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}}{n+1}=A_{n+1}$$

در نتیجه: $A_{n+1}=\frac{nA_n+a_{n+1}}{n+1}$. از طرف دیگر، چون $a_{n+1}\ge A_n$، پس عدد نامنفی b وجود دارد، به‌طوری که $a_{n+1}=A_n+b$. در نتیجه:

$$A_{n+1}=\frac{nA_n+A_n+b}{n+1}=A_n+\frac{b}{n+1}$$

طرفین تساوی را به توان $(n+1)$ می‌رسانیم:

$$(A_{n+1})^{n+1}=\left(A_n+\frac{b}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$=(A_n)^{n+1}+\binom{n+1}{1}(A_n)^n\frac{b}{n+1}+\binom{n+1}{2}...\ge(A_n)^{n+1}+(A_n)^n b$$
$$=(A_n)^n(A_n+b)=(A_n)^n a_{n+1}$$

(در بالا از بسط دوجمله‌ای استفاده کردیم و توجه داریم که نوشتن دو جملهٔ اول از بسط، برای منظور ما کافی بود. همچنین: $\binom{n+1}{1}=n+1$).

چون بنا بر فرض استقرا، قضیه برای n عدد برقرار است، پس: $(A_n)^n\ge a_1a_2...a_n$. در نتیجه:

$$(A_{n+1})^{n+1}\ge(A_n)^n a_{n+1}\ge a_1a_2...a_na_{n+1}$$

و سرانجام: $A_{n+1}\ge\sqrt[n+1]{a_1a_2...a_{n+1}}$. پس حکم استقرا ثابت شد.

مسئلهٔ ۷. ثابت کنید واسطهٔ توافقی n عدد مثبت a_1، a_2، ... و a_n از واسطهٔ هندسی آن‌ها بیشتر نیست؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{n}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)} \le \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

حل: قضیهٔ نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی (مسئلهٔ ۶) را برای n عدد مثبت $\frac{1}{a_1}$، $\frac{1}{a_2}$، ... و $\frac{1}{a_n}$ اعمال می‌کنیم:

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)}{n} \ge \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\dots\frac{1}{a_n}\right)}$$

با معکوس کردن طرفین نابرابری اخیر به حکم می‌رسیم.

مسئلهٔ ۸. نشان دهید برای هر n عدد مثبت a_1، a_1، ... و a_n داریم:

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$$

حل: از مسئله‌های ۷ و ۶ می‌توان نتیجه گرفت:

واسطهٔ حسابی n عدد مثبت $\ge$ واسطهٔ توافقی n عدد مثبت

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{n}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)} \le \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$$

با کمی عملیات جبری به سادگی می‌توانید نابرابری مسئله را نتیجه بگیرید.

مسئلهٔ ۹. نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n>1$، داریم: $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

حل: در قضیهٔ نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی (مسئلهٔ ۶)، $a_1=1$، $a_2=2$، ... و $a_n=n$ را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{1\times 2\times\dots\times n} \le \frac{1+2+\dots+n}{n}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} \le \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

طرفین را به توان n برسانید تا نتیجهٔ موردنظر به دست آید.

تمرین

۱. نشان دهید در بین همهٔ مستطیل‌های با محیط ثابت p، مربع بیشترین مساحت را دارد.

۲. نشان دهید برای هر زاویهٔ حادهٔ α داریم:
$\tan\alpha+\cot\alpha \ge 2$

۳. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b با شرط $a+b=1$، داریم:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{25}{2}$$